Szereg Taylora i Maclaurina

1. Do czego to służy?

Szeregi Taylora i Maclaurina służą do przedstawienia dowolnej[1] funkcji za pomocą wielomianu. W jakim celu? Ponieważ wielomiany stosunkowo łatwo się „obrabia”, łatwo wyznacza ich miejsca zerowe i pochodne, co upraszcza obliczenia.

Przykład: Oblicz bez użycia kalkulatora sin(0.1) Potrafisz? Po rozwinięciu w szereg Maclaurina:

$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ Po podstawieniu x=0.1 otrzymujemy 0.1-0.001/6+0.00001/120=0.0998334.

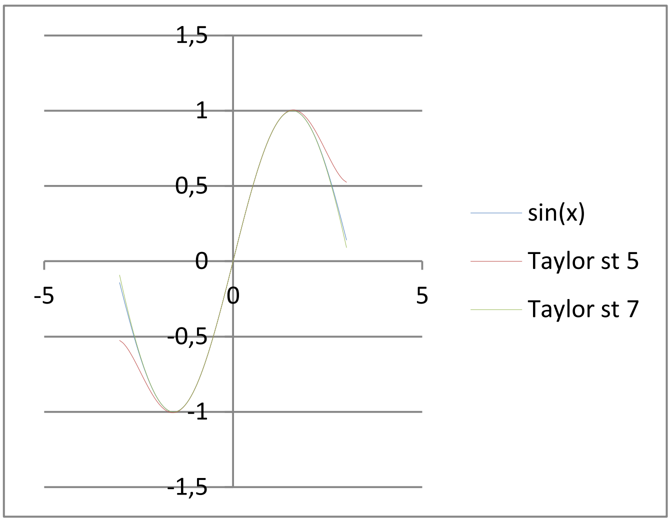
Powyższa metoda wykorzystywana jest w algorytmach obliczania funkcji trygonometrycznych wykorzystywanych w komputerach.

2. Jak to się liczy?

Szereg Taylora:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

gdzie x_0 to punkt w pobliżu którego przybliżamy naszą funkcję wielomianem (im dalej jesteśmy od tego punktu, tym przybliżenie jest mniej dokładne. Na rysynku poniżej pokazane jest przybliżenie funkcji sin(x) wielomianem stopnia piątego (czerwona linia) w pobliżu x=0. Jak widać wykresy



zaczynają odbiegać od siebie dopiero w pobliżu x=1.5. Można to poprawić zwiększając stopień wielomianu (zielona linia).

Szczególnym (i bardzo sympatycznym) przypadkiem szeregu Taylora jest szereg Maclaurina, w którym x_0=0 co upraszcza wzór do: $f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$

Przykład 1: Rozwinąć w szereg Maclaurina stopnia 5 funkcję $f(x) = \cos(2x)$

Wyznaczmy odpowiednie współczynniki:

f(x)	cos(2x)	f(0)	1
f'(x)	-2sin(2x)	f'(0)	0
f''(x)	-4cos(2x)	f''(0)	-4

[1] No prawie dowolnej ☺ funkcja musi być ciągła, posiadać pochodną w pobliżu analizowanego punktu, ta pochodna też musi mieć pochodną itp.

f'''(x)	8sin(2x)	f'''(0)	0
$f^{(4)}(x)$	16cos(2x)	$f^{(4)}(0)$	16
$f^{(5)}(x)$	-32sin(2x)	$f^{(5)}(0)$	0

Po podstawieniu do wzoru otrzymujemy:

$$\sin(2x) \approx 1 - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{16}{4!}x^4 = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$$

Przykład 2: Rozwinąć funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$ w szereg Taylora stopnia 5 w pobliżu punktu x=1

Podobnie jak w poprzednim przykładzie:

f(x)	$\frac{1}{x}$	f(1)	1
f'(x)	$-\frac{1}{x^2}$	f'(1)	-1
f''(x)	$\frac{2}{x^3}$	f''(1)	2
f'''(x)	$-\frac{6}{x^4}$	f'''(1)	-6
$f^{(4)}(x)$	$\frac{24}{x^5}$	$f^{(4)}(1)$	24
$f^{(5)}(x)$	$-\frac{120}{x^6}$	$f^{(5)}(1)$	-120

Po podstawieniu do wzoru otrzymujemy:

$$\frac{1}{x} \approx 1 - \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 - \frac{6}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4 - \frac{120}{5!}(x-1)^5$$

$$\frac{1}{x} \approx 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - (x-1)^5$$
$$= 6 - 15x + 20x^2 - 15x^3 + 6x^4 - x^5$$

3. Interpretacja fizyczna.

Załóżmy, że zależność położenia pewnego punktu od czasu opisana jest funkcją x(t)

oznaczmy $t\text{-}t_0$ jako Δt. Wówczas rozwijając x(t) w szereg Taylora otrzymujemy

$x(t) = x_0 + x'(t_0)\Delta t + \frac{x''(t_0)}{2}\Delta t^2 + \frac{x'''(t_0)}{6}\Delta t^3 + \cdots$ Ponieważ x'(t) to v(t) a x''(t)=v'(t)=a(t) to

$x(t) = x_0 + v_0\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2} + \frac{b\Delta t^3}{6}$, gdzie b=x'''(t) czyli a'(t) czyli $b = \frac{\Delta a}{\Delta t}$ zmiana przyśpieszenia w czasie.

Zauważcie, że ta czerwona część to wzór na położenie w ruchu jednostajnie zmiennym.

4. Rozwiązanie zadania z $\sqrt{x}$ z zajęć.

Próba rozwinięcia $\sqrt{x}$ w pobliżu 0 kończy się fiaskiem ponieważ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ co dla x_0=0 daje dzielenie przez 0. Jedyne wyjście to przesunąć x_0 w „bezpieczne” miejsce (dowolną liczbę dodatnią)

Odpowiednio dla x_0=0.5 i 1 otrzymujemy rozwinięcia:

$$\sqrt{x} \approx \frac{63}{256\sqrt{2}} + \frac{315x}{128\sqrt{2}} - \frac{105x^2}{32\sqrt{2}} + \frac{63x^3}{16\sqrt{2}} - \frac{45x^4}{16\sqrt{2}} + \frac{7x^5}{8\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x} \approx \frac{63}{256} + \frac{315x}{256} - \frac{105x^2}{128} + \frac{63x^3}{128} - \frac{45x^4}{256} + \frac{7x^5}{256}$$

5. Jak się to robi na komputerze:

Excell[2]

- Tworzymy dwie kolumny danych x i f(x). Wartości x powinny znajdować się w pobliżu interesującego nas punktu x_0
- Rysujemy wykres zależności f(x) od x (punktowy)
- Dodajemy linię trendu (prawy przycisk myszy na wykresie) typu wielomianowego i określamy interesujący nas stopień wielomianu (maksymalnie 6) i ewentualnie punkt przecięcia z osią y (wartość dla x=0). Pamiętajmy aby zaznaczyć opcję „wyświetl równanie na wykresie”

Mathematica lub Wolfram Alpha

```
Series[wzór_funkcji,{x,x0,stopień_wielomianu}]
```

Maxima

```
taylor(wzór_funkcji,x,x0,stopień_wielomianu);
```

6. Zadania

1. Podane niżej funkcje przybliż wielomianem stopnia 5.
   a. $f(x) = \sin(x^2)$
   b. $f(x) = \sin^2(x)$
   c. $f(x) = \frac{1}{x}$
   d. $f(x) = \ln(x)$
2. Rozwiń funkcję $f(x) = e^{-x^2}$ w szereg Maclaurina stopnia 6. Oszacuj maksymalny błąd jaki popełniamy stosując to przybliżenie w przedziale (-2,2). Wyznacz taki przedział x, w którym błąd przybliżenia nie przekracza 5% (poziom ufności wynosi 95%). Za miarę błędu przyjmij wyrażenie $\Delta y_{wzgl} = \frac{|w(x)-f(x)|}{f(x)}$, gdzie w(x) to wyznaczony wielomian

---

[2] Nie jest to typowy szereg Taylora, a tzw. aproksymacja wielomianowa, ale efekt jest podobny ☺